AXIOME UND ERSTE DEFINITIONEN DER MENGENLEHRE

Zusammenfassung. This LaTeXfile is part of the project **Principia Mathematica II** which is an open source project that wants to present mathematical knowledge in a formal correct form. It includes a proof verifier which checks a mathematical proof written in a certain formal language and converters to other formats (HTML, LaTeX). See http://www.meyling.com/principia/principia.html for details about this project.

Dieses Modul enthält die Axiome und ersten Definitionen der Neumann-Bernays-Gödelschen Mengenlehre.

Inhaltsverzeichnis

Module admin: principa@meyling.com

module specification

This module has the following specification:

Name:	**set1**
Module version:	**1.00.00**
Rule version:	**1.00.00**
Locations:	**.**

Author(s) of this module:

Michael Meyling michael@meyling.com

Needs following modules:

Name:	**predaxiom**
Module version:	**1.00.00**
Rule version:	**1.00.00**
Locations:	**.**

Definition des Prädikats 'ist ein Element der Klasse' DEFINE(IN,

Definition des Prädikats 'ist eine Menge'.

Definition 0.1.

$$set(x_1) \;\equiv\; \exists_{x_2} x_1 \in x_2$$

Ist eine Klasse also Element einer anderen Klasse, dann wird sie auch als **Menge** bezeichnet.

Das Axiom der Klassenbildung ist das folgende:

Axiom 0.1.

$$\exists_{x_1} \forall_{x_2} (x_2 \in x_1 \;\Leftrightarrow\; (set(x_2) \;\wedge\; R_1(x_2)))$$

Dieses Axiom wird auch 'Komprehensionsaxiom' genannt. Es ist zu beachten, dass für die Prädikatvariable beliebige Formeln eingesetzt werden können[1], in denen auch weitere Subjektvariablen frei vorkommen können.

Die Gleichheit zweier Klassen kann definiert werden durch die Eigenschaft, dass sie dieselben Elemente besitzen.

Definition 0.2.

$$x_1 = x_2 \;\equiv\; \forall_{x_3}(x_3 \in x_1 \;\Leftrightarrow\; x_3 \in x_2)$$

Es wird von der 'Umfangsgleichheit' gesprochen. Diese Definition reicht jedoch nicht aus, um eine Klasse durch eine gleiche Klasse zu ersetzen.

Der Zusammenhang von Umfangsgleichheit und die Ersetzbarkeit für eine Enthaltenseinsbeziehung (links von $\in$) wird erst durch das Axiom der Extensionalität garantiert.

Axiom 0.2.

$$((x_1 = x_2 \;\wedge\; x_3 \in x_1) \;\Rightarrow\; x_3 \in x_2)$$

Durch die Extensionalität und das Komprehensionsaxiom wird nun der Zusammenhang zwischen einer Aussage PREDVAR(1, L(VAR(2))) und der durch diese Aussage definierten Klasse festgelegt. Das Komprehensionsaxiom behaupted die Existenz mindestens einer durch die Aussage AND(PREDVAR(1, L(VAR(2))), ISSET(VAR(2)) definierten Klasse. Die Gleichheitsdefinition sichert unter Berücksichtigung der Extensionalität, dass es höchstens eine solche Klasse gibt: irgend zwei Klassen, welche dieselben Elemente besitzen, sind gleich im Sinne der Ersetzbarkeit in allen einschlägigen Aussagen. Mit anderen Worten: es gibt nur genau eine solche Klasse. Deshalb können wir eine neue abkürzende Schreibweise einführen.

Abbreviation 0.1.

$$x_1 \in \{x_2 | R_1(x_2)\} \equiv (set(x_1) \;\wedge\; R_1(x_1))$$

Für die Beziehung in der anderen Richtung muss das Folgende gelten.

Abbreviation 0.2.

$$\{x_2 | R_1(x_2)\} \in x_1 \equiv \exists_{x_3}(\forall_{x_2}((set(x_2) \;\wedge\; R_1(x_2)) \;\Leftrightarrow\; x_2 \in x_3) \;\wedge\; x_3 \in x_1)$$

Im Folgenden verwenden wir diese abkürzenden Schreibweisen in allen prädikativen Aussagen.

Die Kompatiblität mit dem Extensionalitätsaxiom ist gewährleistet.

Theorem 0.1.

$$(\{x_2 | R_1(x_2)\} \in x_1 \;\Leftrightarrow\; (\exists_{x_3}(x_3 = \{x_2 | R_1(x_2)\} \;\wedge\; x_3 \in x_1)))$$

Proof.

1	$(\{x_2\|R_1(x_2)\} \in x_1 \;\Leftrightarrow\; \{x_2\|R_1(x_2)\} \in x_1)$	$(P_1 \;\Leftrightarrow\; P_1)$ ist eine Tautologie
2	$(\{x_2\|R_1(x_2)\} \in x_1 \;\Leftrightarrow\; \exists_{x_3}(\forall_{x_2}((\mathrm{set}(x_2) \;\wedge\; R_1(x_2)) \;\Leftrightarrow\; x_2 \in x_3) \;\wedge\; x_3 \in x_1))$	abr:set2 aus 1
3	$(\{x_2\|R_1(x_2)\} \in x_1 \;\Leftrightarrow\; \exists_{x_3}(\forall_{x_4}((\mathrm{set}(x_4) \;\wedge\; R_1(x_4)) \;\Leftrightarrow\; x_4 \in x_3) \;\wedge\; x_3 \in x_1))$	aus 2
4	$(\{x_2\|R_1(x_2)\} \in x_1 \;\Leftrightarrow\; \exists_{x_3}(\forall_{x_4}(x_4 \in x_3 \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{set}(x_4) \wedge R_1(x_4))) \wedge x_3 \in x_1))$	aus 3
5	$(\{x_2\|R_1(x_2)\} \in x_1 \;\Leftrightarrow\; \exists_{x_3}(\forall_{x_4}(x_4 \in x_3 \;\Leftrightarrow\; x_4 \in \{x_2\|R_1(x_2)\}) \;\wedge\; x_3 \in x_1))$	aus 4
6	$(\{x_2\|R_1(x_2)\} \in x_1 \;\Leftrightarrow\; \exists_{x_3}(x_3 = \{x_2\|R_1(x_2)\} \;\wedge\; x_3 \in x_1))$	aus 5

[1] in denen VAR(1) gar nicht und VAR(2) frei vorkommen müessen

□

Aus den Abkürzungen ergibt sich für die Gleichheit von derartigen Mengen das Folgende.

Theorem 0.2.

$$(\{x_1|R_1(x_1)\} = \{x_1|R_2(x_1)\} \;\Leftrightarrow\; (\forall_{x_1}(set(x_1) \;\Rightarrow\; (R_1(x_1) \;\Leftrightarrow\; R_2(x_1)))))$$

Proof.

1	$(\{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\} \Leftrightarrow \{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\})$	$(P_1 \Leftrightarrow P_1)$ ist eine Tautologie
2	$(\{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\} \Leftrightarrow \forall_{x_2}(x_2 \in \{x_1\|R_1(x_1)\} \Leftrightarrow x_2 \in \{x_1\|R_2(x_1)\}))$	def:equal aus 1
3	$(\{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\} \Leftrightarrow \forall_{x_2}((\mathrm{set}(x_2) \wedge R_1(x_2)) \Leftrightarrow (\mathrm{set}(x_2) \wedge R_2(x_2))))$	abr:set1 aus 2
4	$(\{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\} \Leftrightarrow \forall_{x_2}(((\mathrm{set}(x_2) \wedge R_1(x_2)) \Rightarrow (\mathrm{set}(x_2) \wedge R_2(x_2))) \wedge ((\mathrm{set}(x_2) \wedge R_1(x_2)) \Rightarrow (\mathrm{set}(x_2) \wedge R_2(x_2)))))$	aus 3
5	$(\{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\} \Leftrightarrow \forall_{x_2}(((\mathrm{set}(x_2) \wedge R_1(x_2)) \Rightarrow R_2(x_2)) \wedge ((\mathrm{set}(x_2) \wedge R_2(x_2)) \Rightarrow R_2(x_2))))$	aus 4
6	$(\{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\} \Leftrightarrow \forall_{x_2}((\mathrm{set}(x_2) \Rightarrow (R_1(x_2) \Rightarrow R_2(x_2))) \wedge (\mathrm{set}(x_2) \Rightarrow (R_2(x_2) \Rightarrow R_1(x_2)))))$	aus 5
7	$(\{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\} \Leftrightarrow \forall_{x_2}(\mathrm{set}(x_2) \Rightarrow ((R_1(x_2) \Rightarrow R_2(x_2)) \wedge (R_2(x_2) \Rightarrow R_1(x_2)))))$	aus 6
8	$(\{x_1\|R_1(x_1)\} = \{x_1\|R_2(x_1)\} \Leftrightarrow \forall_{x_2}(\mathrm{set}(x_2) \Rightarrow (R_1(x_2) \Leftrightarrow R_2(x_2))))$	aus 7

□

Die Definition der Gleichheit von Klassen führt zur den gewohnten Eigenschaften der Gleichheit. Zunächst die Reflexifität.

Theorem 0.3.

$$x_1 = x_1$$

Proof.

1	$(R_1(x_2) \Leftrightarrow R_1(x_2))$	$(P_1 \Leftrightarrow P_1)$ ist eine Tautologie
2	$(R_2(x_2) \Rightarrow (R_1(x_2) \Leftrightarrow R_1(x_2)))$	aus 1
2	$(\mathrm{set}(x_2) \Rightarrow (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow x_2 \in x_1))$	aus 2
2	$\forall_{x_2}(\mathrm{set}(x_2) \Rightarrow (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow x_2 \in x_1))$	aus 3
2	$x_1 = x_1$	def:equal aus 3

□

Es folgt die Symmetrie.

Theorem 0.4.

$$(x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; x_2 = x_1)$$

Proof.

1	sei: $x_1 = x_2$

2	$\forall_{x_3}(\text{set}(x_3) \;\Rightarrow\; (x_3 \in x_1 \;\Leftrightarrow\; x_3 \in x_2))$	def:equal aus 1
3	$\forall_{x_3}(\text{set}(x_3) \;\Rightarrow\; (x_3 \in x_2 \;\Leftrightarrow\; x_3 \in x_1))$	aus 2
4	$x_2 = x_1$	aus 2
5	so: $(x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; x_2 = x_1)$	aus 1, 4

□

Und nun folgt die Transitivität der Gleichheit.

Theorem 0.5.

$$((x_1 = x_2 \;\wedge\; x_2 = x_3) \;\Rightarrow\; x_2 = x_3)$$

Proof.

1	sei: $(x_1 = x_2 \;\wedge\; x_2 = x_3)$	
2	$(\forall_{x_4}(\text{set}(x_4) \;\Rightarrow\; (x_4 \in x_1 \;\Leftrightarrow\; x_4 \in x_2)) \;\wedge\; \forall_{x_4}(\text{set}(x_4) \;\Rightarrow\; (x_4 \in x_2 \;\Leftrightarrow\; x_4 \in x_3)))$	def:equal aus 1
3	$\forall_{x_4}((\text{set}(x_4) \;\Rightarrow\; (x_4 \in x_1 \;\Leftrightarrow\; x_4 \in x_2)) \;\wedge\; (\text{set}(x_4) \;\Rightarrow\; (x_4 \in x_2 \;\Leftrightarrow\; x_4 \in x_3)))$	aus 2
4	$\forall_{x_4}(\text{set}(x_4) \;\Rightarrow\; ((x_4 \in x_1 \;\Leftrightarrow\; x_4 \in x_2) \wedge (x_4 \in x_2 \;\Leftrightarrow\; x_4 \in x_3)))$	aus 3
5	$\forall_{x_4}(\text{set}(x_4) \;\Rightarrow\; (x_4 \in x_1 \;\Leftrightarrow\; x_4 \in x_3))$	aus 4
6	so: $((x_1 = x_2 \;\wedge\; x_2 = x_3) \;\Rightarrow\; x_2 = x_3)$	aus 1, 5

□

[?]